確率測度の空間への写像の調和性とその周辺 (調和写像論の深化と展望)

伊藤, 光弘; 佐藤, 弘康

数理解析研究所講究録
第 1720 巻 2010 年 99-111

確率測度の空間への写像の調和性とその周辺

伊藤 光弘 （筑波大学 数学系）
佐藤 弘康 （東京電機大学 情報環境学部）

1 はじめに

可微分多様体 M 上の正値確率測度全体のなす空間 $\mathcal{P}(M)$ には統計学や情報理論における Fisher 情報行列に由来する Riemann 計量 G が自然に定義される（Fisher 情報計量）．この計量は正の定曲率計量であり，M 上の微分同相群が等長変換として作用する極めて対称性の高い無限次元計量である．

Riemann 多様体 (X, g) 上の Poisson 核や熱核などの核関数は空間 X からある空間 M 上の確率測度のなす空間 $\mathcal{P}(M)$ への写像 ϕ（Poisson 核写像，熱核写像）を定義し，X がある条件をみたすとき，ϕ は相似的となり，Poisson 核写像の場合は調和写像となる．

本稿の目的は，空間 X のどのような幾何学的性質が写像 $\phi: X \to \mathcal{P}(M)$ の相似性あるいは調和性と結びついているのかを述べることである．まず，第 2 節で正値確率測度全体のなす空間上の Fisher 情報計量の幾何について Frriedrich [7] の定義と結果を紹介する．第 3 節では Poisson 核写像 φ と熱核写像 φ_t を定義し，それらの相似性に関する結果（定理 3.3 および定理 3.5）を述べる．また，これらの写像がともに相似写像となる Damek-Ricci 空間について述べる．第 4 節では写像 $\phi: (X, g) \to (\mathcal{P}(M), G)$ の調和性について考え（定理 4.2），Damek-Ricci 空間上の Poisson 核写像 φ が相似的かつ調和写像，つまり極小写像となることを述べる．この結果から，「Poisson 核写像が極小となる空間はどのように特徴付けられるか？（このような空間は Damek-Ricci 空間に限るのか？）」という問題が考えられる．第 5 節でこの問題に対する部分的な解（定理 5.1）を与える．この結果に関連し，漸近的調和多様体および可視多様体に関する結果を述べる．

2 正値確率測度のなす空間上の Fisher 情報計量

M を向き付けられた多様体，dv_M をその上の滑らかな体積要素とし，$\mathcal{P}(M)$ を M 上の正値密度関数をもつ確率測度全体のなす空間とする；

$$\mathcal{P}(M)=\left\{\mu=p\,dv_M\;\middle|\;p:M\to\mathbb{R}_+,\ \int_M\mu=1\right\}.$$

$\mathcal{P}(M)$ を無限次元の多様体と見なす[*1]と，$\mu\in\mathcal{P}(M)$ における接空間は

$$T_\mu\mathcal{P}(M)\simeq\left\{\tau=q\,dv_M\;\middle|\;q:M\to\mathbb{R},\ \int_M\tau=0\right\}$$

と同一視できる．$T_\mu\mathcal{P}(M)$ 上の内積 G_μ を

$$G_\mu(\tau_1,\tau_2)=\int_M\frac{q_1}{p}\cdot\frac{q_2}{p}\cdot p\,dv_M \tag{2.1}$$

と定義する．ここで，$\mu=p\,dv_M\in\mathcal{P}(M)$，$\tau_i=q_i\,dv_M\in T_\mu\mathcal{P}(M)$ $(i=1,2)$．このとき $G=\{G_\mu\}_{\mu\in\mathcal{P}(M)}$ を $\mathcal{P}(M)$ 上の **Fisher 情報計量**とよぶ．計量 G に関する Levi-Civita 接続 ∇^G は

$$\nabla^G{}_{\tau_1}\tau_2=\left(\frac{q_1}{p}\cdot\frac{q_2}{p}-\int_M\frac{q_1}{p}\cdot\frac{q_2}{p}\cdot p\,dv_M\right) \tag{2.2}$$

で与えられる．ここで，τ_2 はすべての点で τ_2 となる $\mathcal{P}(M)$ 上のベクトル場とみている．

Fisher 情報計量は以下のような幾何学的特性を持つ．

定理 2.1 (Friedrich[7])．$(\mathcal{P}(M),G)$ は以下の性質を満たす．

(1) G の断面曲率は至るところ $\frac{1}{4}$ である．
(2) M の向きを保つ微分同相全体からなる群 $\mathrm{Diff}_+(M)$ は微分形式の引き戻しとして $\mathcal{P}(M)$ に作用する（M がコンパクトのときこの作用は推移的である）．また，この作用は G に関して等長的である．
(3) 測地的に完備ではない．

*1 この空間にどのような位相を入れるかはここでは問題にしない．これについては [14] を参照．

3 Poisson 核写像，熱核写像，Damek-Ricci 空間

3.1 Poisson 核写像

(X,g) を n 次元 Hadamard 多様体，つまり完備，単連結，非正曲率 Riemann 多様体とする．弧長で径数付けられた X 上の半開測地線の全体を $\mathcal{G}(X)$ と書く．$\gamma_1,\gamma_2\in\mathcal{G}(X)$ は任意の $t\in[0,\infty)$ に対して $d(\gamma_1(t),\gamma_2(t))<+\infty$ が成り立つとき，漸近同値であるといい，これにより $\mathcal{G}(X)$ に同値関係が定まる．この同値類を X の理想境界とよび，∂X と書く．$X\cup\partial X$ には n 次元円板に同相となるような自然な位相が定まる．特に点 $x_0\in X$ を固定すると，∂X の元は x_0 を始点とする半開測地線の初速ベクトルと 1 対 1 に対応することから，∂X は $S^{n-1}(1)\subset T_{x_0}X$ と同一視できる．

$X\cup\partial X$ 上では古典的 Dirichlet 問題の類推として無限遠 Dirichlet 問題を考えることができる．つまり，$f\in C^0(\partial X)$ に対し，

$$\Delta_g u=0,\qquad u|_{\partial X}=f \tag{3.1}$$

を満たす関数 u を求める問題である（ここで Δ_g は g の Laplace-Beltrami 作用素）．X の断面曲率が $-a^2\le K_X\le -b^2<0$ を満たすとき，(3.1) の解はある関数 $P(x,\theta)$ を用いて

$$u(x)=\int_{\partial X} f(\theta)\,P(x,\theta)\,d\theta$$

と積分表示できる．この基本解 $P(x,\theta)$ を **Poisson** 核とよぶ．ただし，$d\theta$ は ∂X を $S^{n-1}(1)\subset T_{x_0}X$ と同一視したときの $(S^{n-1}(1),g_{x_0}|_{S^{n-1}(1)})$ の標準単位体積要素である．

∂X 上 $f\equiv 1$ なる関数を境界条件とする無限遠 Dirichlet 問題の解は $u\equiv 1$ であるから，Poisson 核は $\int_{\partial X}P(x,\theta)\,d\theta=1$ を満たす．つまり，Poisson 核は写像 $\varphi:X\ni x\longmapsto P(x,\theta)\,d\theta\in\mathcal{P}(\partial X)$ を与える．これを **Poisson** 核写像とよぶ．

注意 **3.1.** 断面曲率が $-a^2\le K_X\le -b^2<0$ を満たす Hadamard 多様体上の Poisson 核は次の条件を満たす関数として特徴付けられる[*2]；

(1) $P(\cdot\,,\theta)\in C^0(X\cup\partial X\setminus\{\theta\})$,

[*2] 詳細は [19, 2 章 2,3 節] を参照．一般の Hadamard 多様体において Poisson 核が存在するかどうかはわからない．

(2) $P(\cdot,\theta)$ は X 上の正値調和関数,

(3) 任意の $\theta\in\partial X$ に対して $P(x_0,\theta)=1$ となる $x_0\in X$ が存在する[*3],

(4) $\theta=\theta'$ ならば $\lim_{x\to\theta}P(x,\theta)=0$.

例 3.2. (1) 実双曲空間 (D^n,g) の中心 o で正規化された Poisson 核は

$$P(x,\theta)=\left(\frac{1-|x|^2}{|x-\theta|^2}\right)^{n-1}\qquad(x\in D^n\subset\mathbb{R}^n,\ \theta\in\partial D^2=S^{n-1}(1))$$

で与えられる. ここで $|\cdot|$ は $\mathbb{R}^n$ の標準ノルムである.

(2) 一般の階数 1 非コンパクト型対称空間 ($\mathbb{R}H^n,\mathbb{C}H^N,\mathbb{H}H^N,\mathrm{Cay}H^2$) 上の Poisson 核は Busemann 関数 $B(x,\theta)$ と体積エントロピー ρ [*4]を用いて

$$P(x,\theta)=\exp\left(-\rho\,B(x,\theta)\right)\tag{3.2}$$

と表すことができる [4].

Busemann 関数とは点 $x_0\in X$ を固定したとき, $\theta\in\partial X$ に対して

$$B(x,\theta)=\lim_{t\to\infty}\left(d(\gamma_\theta(t),x)-t\right)$$

で定まる X 上の関数[*5]である. ここで, γ_θ は $x_0\in X$ を始点とし, $\theta\in\partial X$ に漸近収束する半開測地線である. Busemann 関数は「C^1 級凸関数で勾配ベクトル ∇B がいたるところ $|\nabla B|=1$ を満たす」関数と特徴づけられる ([17, p.301, 補題 4.12]).

Poisson 核が Busemann 関数の指数関数で表されるとき, Poisson 核写像 φ は以下の性質を満たす.

定理 3.3 ([10]). (X,g) を n 次元等質 Hadamard 多様体とする. X 上に Poisson 核 $P(x,\theta)$ が存在し,

$$P(x,\theta)=\exp\left(-c\,B(x,\theta)\right)\qquad(c\text{ は正の定数})\tag{3.3}$$

と表されるならば, Poisson 核写像 φ は相似的 ($\varphi^*G=\frac{c}{n}g$) である.

[*3] この条件を満たす Poisson 核を $x_0\in X$ で正規化された Poisson 核とよぶ.

[*4] $\rho=\lim_{r\to\infty}\dfrac{1}{r}\log\mathrm{vol}(B(x;r))$. ここで, $B(x;x)$ は x を中心とする半径 r の測地球.

[*5] これを $\boldsymbol{x_0}$ **を基点とする Busemann 関数**とよぶ. 別の点 $y\in X$ を基点とする Busemann 関数を $B'(x,\theta)$ とすると, $B'(x,\theta)=B(x,\theta)-B(y,\theta)$ が成り立つ.

(証明の概略). (X,g) の等長変換群 $\mathrm{Isom}(X,g)$ は ∂X への作用に自然に拡張できる．さらにこの拡張された作用は $\mathcal{P}(\partial X)$ に微分形式の引き戻しとして作用する（この作用は G に関して等長的）．このとき，Busemann 関数の性質から $\psi \in \mathrm{Isom}(X,g)$ の作用と Poisson 核写像 φ は次の意味で可換である；$(\psi^{-1})^* \circ \varphi = \varphi \circ \psi$. この性質と X の等質性から Busemann 関数 $B(x,\theta)$ の基点 x_0 において $\varphi^* G(x_0) = C\, g(x_0)$ となることを示せばよい．これは $|\nabla B| = 1$ および $P(x_0,\theta) = 1$ となることを用いて示される（詳細は [14, 15, 10] を参照）． □

3.2 熱核

Riemann 多様体 (X,g) 上の熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \Delta_g u(t,x) = 0$$

の基本解 $K(t;x,y)$ を X 上の熱核とよぶ．Poisson 核の場合と同様，熱核は $t>0$ で径数付けられた写像 $\varphi_t : X \ni x \longmapsto K(t;x,y)\, dv_g(y) \in \mathcal{P}(X)$ を与える．これを熱核写像とよぶ．

例 3.4. n 次元 Euclid 空間の熱核は以下の式で与えられる；

$$K(t;x,y) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right).$$

また，3 次元実双曲空間の熱核は以下の式で与えられる；

$$K(t;x,y) = (4\pi t)^{-3/2} \frac{r}{\sinh r} \exp\left(-t - \frac{r^2}{4t}\right), \qquad (r = d(x,y)).$$

いずれの場合も熱核は距離に依存する関数 $K(t;x,y) = K(t;d(x,y))$ となる．

熱核写像の相似性については以下のことがわかっている．

定理 3.5 ([9])**.** 調和的 Hadamard 多様体上の熱核写像は相似的である $({\varphi_t}^* G = C(t)\, g)$.

Riemann 多様体が調和的とは，任意の点 $p \in X$ を中心とする正規座標系で Riemann 体積要素を記述するとき，その密度関数 $\omega_p = \sqrt{\det(g_{ij})}$ が動径関数 $\omega_p(x) = \omega(d(p,x))$ になることである[*6]．単連結な調和空間上の熱核は動径的関数 $K(t;x,y) = K(t;d(x,y))$ である[*7]ことが知られている [20].

---

*6 調和多様体の定義にはこの他にもいくつか同値な命題が存在する（詳しくは [3] を参照）.

*7 このような性質を満たす空間を強調和的という．

（定理 **3.5** の証明の概略）．(X,g) は Hadamard 多様体であるから，X は $\mathbb{R}^n$ に同相である．勝手な点 p を中心とする極座標をとると，空間の調和性より体積要素は大域的に $dv_g(x) = \omega(r)\,dr\,d\mu_{S^{n-1}(1)}$ と書ける（ただし，$r = d(x,p)$）．密度関数 $\omega(r)$ は中心 p の選び方に依らずに決まることに注意する．単連結性と調和性から熱核も動径的関数となる．以上の性質を用いると $\varphi_t{}^*G(v,v)$ の値が単位接ベクトル $v \in T_xX$ および $x \in X$ の選び方に依らずに一定であることがわかる． □

注意 **3.6.** 相似定数 $C(t)$ がどのような関数なのか一般的にはわかっていない．Euclid 空間の場合は $C(t) = \frac{1}{2t}$ となるが，3 次元実双曲空間の場合でも具体的に計算することは困難である（初等関数では表せない）．しかし，ある種の空間において $n\,C(t)$ が $\varphi_t(x)$ の Shannon のエントロピーの時間微分で表される*8ことがわかっている [9, 13].

3.3 Damek-Ricci 空間

前節では Riemann 多様体上の微分方程式の積分核を用いて確率測度の空間への写像 ϕ を定義し，ある条件のもとで ϕ が相似写像となることを見た．その条件を満たす空間の例が Damek-Ricci 空間である．Damek-Ricci 空間とは一般化 Heisenberg 群を 1 次元拡大した可換 Lie 群である．

$\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,], \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ を 2-step 冪零 Lie 環，$\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{n}$ の中心，$\mathfrak{v}$ をその直交補空間とする．線形写像 $J : \mathfrak{z} \to \mathrm{End}(\mathfrak{v})$ を

$$\langle J_Z X, Y\rangle = \langle Z, [X,Y]\rangle \qquad (X, Y \in \mathfrak{v},\ Z \in \mathfrak{z})$$

と定義する．任意の $Z \in \mathfrak{z}$ に対し，$J_Z \circ J_Z = -|Z|^2\,\mathrm{id}_{\mathfrak{v}}$ が成り立つとき，$\mathfrak{n}$ を一般化 **Heisenberg** 環（または **H-type** 環）とよび，$\mathfrak{n}$ を Lie 環とする単連結 Lie 群 N を一般化 **Heisenberg** 群（または **H-type** 群）とよぶ．

一般化 Heisenberg 環 $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ の 1 次元拡大 $\mathfrak{s} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathbb{R}A$ にブラケット積 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{s}}$ と内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{s}}$ を

$$\begin{aligned}
[X + Z + lA, X' + Z' + l'A]_{\mathfrak{s}} &= \left(\frac{l}{2}X' - \frac{l'}{2}X\right) + (lZ' - l'Z + [X, X']),\\
\langle X + Z + lA, X' + Z' + l'A\rangle_{\mathfrak{s}} &= \langle X, X'\rangle + \langle Z, Z'\rangle + ll'
\end{aligned}$$

*8 $C(t) = \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\int_X K(t;x,y)\log K(t;x,y)\,dv_g\right)$．これが成り立つためには，熱核が $\int_X \Delta_g K \cdot \log K\,dv = \int_X \nabla K \cdot \nabla \log K\,dv_g$ を満たすことが必要である．後述する Damek-Ricci 空間はこの条件を満たす（熱核の勾配ベクトルのノルム評価式から）．

と定義する．$(\mathfrak{s}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{s}})$ を Lie 環とし，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{s}}$ を左不変に拡張した計量を備えた単連結 Lie 群 S を **Damek-Ricci** 空間とよぶ．$S \simeq \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}_+$ と座標を入れると S の群構造は

$$(X, Z, a) \cdot (X', Z', a') = \left(X + \sqrt{a}X',\ Z + aZ' + \frac{\sqrt{a}}{2}[X, X'],\ aa'\right).$$

で与えられる．

Damek-Ricci 空間 $S = NA$ は以下の性質を満たす [2]；

- S は Hadamard 多様体で，その理想境界は一般化 Heisenberg 群 N に無限遠点を付加した空間 $N \cup \{\infty\}$ とみなすことができる．
- 階数 1 非コンパクト型対称空間は負曲率 Damek-Ricci 空間と特徴付けることができる．また曲率が負であることは，S の一般化 Heisenberg 群 N が $\boldsymbol{J_2}$ 条件[*9]を満たすことと同値である [5].
- S は調和多様体である．したがって，定理 3.5 より Damek-Ricci 空間上の熱核写像は相似的 である．
- S の Poisson 核は Busemann 関数を用いて (3.3) の形で表される [10]（ただし，定数 c は体積エントロピー ρ)．したがって，定理 3.3 より Damek-Ricci 空間上の Poisson 核写像は相似的 である．

4 正値確率測度のなす空間への写像の調和性

写像 $\phi : (X, g) \to (\mathcal{P}(M), G)$ のエネルギー $\mathcal{E}(\phi)$ を

$$\mathcal{E}(\phi) = \frac{1}{2}\int_X \mathrm{trace}_g\,(\phi^* G)\, dv_g$$

と定義する．汎関数 $\phi \mapsto \mathcal{E}(\phi)$ の臨界点，つまり，任意のコンパクト領域 $D \subset X$ と D をコンパクト台とする ϕ の変分 $\{\phi_s\}_{-\varepsilon<s<\varepsilon}$ に対し

$$\frac{d}{ds}\mathcal{E}(\phi_s)\bigg|_{s=0} = 0 \tag{4.1}$$

を満たすとき，ϕ を調和写像という．

*9 互いに直交する任意の $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$ に対して，$J_{Z_1} \circ J_{Z_2} = J_{Z_3}$ となる $Z_3 \in \mathfrak{z}$ が存在すること．

命題 4.1 ([11])**.** $\phi : (X, g) \to (\mathcal{P}(M), G)$ を $\phi(x) = \Phi(x,\theta)\,dv_M(\theta)$ で定義された写像とする．このとき，ϕ が調和であるための必要十分条件は任意のコンパクト領域 $D \subset X$ と D をコンパクト台とし，

$$\int_{\theta\in M} h(x,\theta)\,\Phi(x,\theta)\,dv_M(\theta) = 0$$

を満たす任意の関数 $h(x,\theta)$ に対し

$$\int_D \left\{ \int_M \left(2\Delta_g \log\Phi(x,\theta) - |\nabla \log\Phi(x,\theta)|^2\right) h(x,\theta)\,\Phi(x,\theta)\,dv_M \right\} dv_g = 0 \qquad (4.2)$$

が成り立つことである．

ここで，

$$\tau(\phi)(x) = \left\{2\Delta_g \log\Phi(x,\theta) - |\nabla\log\Phi(x,\theta)|^2 - \mathrm{trace}_g \phi^* G(x)\right\} \Phi(x,\theta)\,dv_M,$$

$$\sigma(x) = h(x,\theta)\,\Phi(x,\theta)\,dv_M$$

とおくと，どちらも M 上で積分すると 0 になることから，$\phi(x) \in \mathcal{P}(M)$ における接ベクトルと見ることができる．特に $\sigma(x)$ は ϕ の変分ベクトル場である．これらを用いると調和写像となるための条件式 (4.2) は

$$\int_{x\in X} G_{\phi(x)}(\tau(\phi)(x), \sigma(x))\,dv_g = 0 \qquad (4.3)$$

と表すことができる．したがって，次の定理を得る．

定理 4.2 ([11])**.** 写像 $\phi : X \ni x \to \Phi(x,\theta)\,dv_M \in \mathcal{P}(M)$ が調和写像となる必要十分条件は $\tau(\phi) = 0$，すなわち

$$2\Delta_g \log\Phi(x,\theta) - |\nabla\log\Phi(x,\theta)|^2 = \mathrm{trace}_g \phi^* G(x) \qquad (4.4)$$

が成り立つことである．これは (4.4) の左辺が $\theta \in M$ に依存しない関数となることと同値である．

注意 4.3. Poisson 核は調和関数であるから，(4.4) の左辺は $|\nabla \log P(x,\theta)|^2$ と簡約化される．したがって Poisson 核写像が調和関数となるための必要十分条件は $|\nabla\log P(x,\theta)|^2$ が $\theta \in \partial X$ に依存しない関数となることである．特に Poisson 核が (3.3) の形で書けるとき，

$$|\nabla \log P(x,\theta)|^2 = c^2 |\nabla B(x,\theta)|^2 = c^2$$

であるから，Poisson 核写像は調和写像となる[*10].

注意 4.4. 熱核写像の調和性については一般的な結果は得られていない．簡単な計算から，Euclid 空間と 3 次元実双曲空間上の熱核写像は調和写像にならないことがわかる．

5 Poisson 核写像の結果に関する逆問題について

これまでの議論から定理 3.3 の条件を満たす空間上の Poisson 核写像は相似的かつ調和写像であることがわかる．さらに Damek-Ricci 空間はそのような空間の例である．この節では，この結果の逆問題，すなわち Poisson 核写像が相似的かつ調和写像という条件からどのような空間の性質明らかになるのかを述べる．

定理 5.1 ([11]). Hadamard 多様体 (X,g) 上に Poisson 核 $P(x,\theta)$ が存在し，ある点 x_0 で正規化されているとする（つまり，任意の $\theta\in\partial X$ に対し $P(x_0,\theta)=1$）．このとき，Poisson 核写像 φ が相似的 ($\varphi^*G=\frac{c^2}{n}g$) かつ調和写像ならば，Poisson 核は Busemann 関数を用いて指数関数表示 (3.3) できる．

証明. φ は相似的であるから[*11]

$$c^2=\mathrm{trace}_g\varphi^*G(x)=\int_{\theta\in\partial X}|\nabla\log P(x,\theta)|^2\,P(x,\theta)\,d\theta. \tag{5.1}$$

一方，φ は調和写像なので，(5.1) の右辺は

$$\begin{aligned}\int_{\partial X}|\nabla\log P(x,\theta)|^2\,P(x,\theta)\,d\theta=&|\nabla\log P(x,\theta)|^2\int_{\partial X}P(x,\theta)\,d\theta\\=&|\nabla\log P(x,\theta)|^2\end{aligned} \tag{5.2}$$

となり，$|\nabla\log P(x,\theta)|^2=c^2$ を得る．ここで，$u(x,\theta)=\frac{1}{c}\log P(x,\theta)$ とおくと $|\nabla u(\,\cdot\,,\theta)|=1$ をみたすことから，$u(\,\cdot\,,\theta)$ の勾配流 $\sigma_\theta(t)$ は測地線となる [18].

次に，この測地線 $\sigma_\theta(t)$ が $\theta\in\partial X$ に漸近収束することを示す．$\sigma_\theta(t)$ の始点を x とすると，簡単な計算から $u(\sigma_\theta(t),\theta)-u(x,\theta)=t$ を得る．u の定義より $P(\sigma_\theta(t),\theta)=$

---

*10 この議論から定理 3.3 の仮定を満たす空間上の Poisson 核写像は相似的かつ調和的，つまり φ は極小部分多様体とみることができる．一般的に極小部分多様体となること示すには平均曲率ベクトルが消えていることをいえばよい．しかし，(2.2) で見たように $\mathcal{P}(M)$ の Levi-Civita 接続が特殊なベクトル場に対してしか表現できないことから，我々の状況では φ の平均曲率ベクトルを計算することは困難である．したがって，調和写像の議論が必要となる

*11 定理 5.1 の結論を得るためには「φ が相似的」でなくても「$\mathrm{trace}_g\varphi^*G(x)$ が定数関数」であれば十分なことがわかる．

$\exp(c\,u(x,\theta)) \cdot e^{ct}$ であるから，

$$\lim_{t\to\infty} P(\sigma_\theta(t),\theta) = \infty \tag{5.3}$$

を得る．Poisson 核は理想境界上では Dirac の δ 関数に収束するので

$$\lim_{x\to\theta'} P(x,\theta) = \begin{cases} 0 & (\theta' \neq \theta) \\ \infty & (\theta' = \theta) \end{cases}$$

を満たさなければならない．したがって (5.3) より $u(\cdot,\theta)$ の勾配流は $\theta \in \partial X$ に漸近的に収束する測地線になることがわかる．Busemann 関数の勾配ベクトルは

$$\nabla B(x,\theta) = -\dot\gamma_{x\theta}(0)$$

（ただし，$\gamma_{x,\theta}$ は $x \in X$ を始点とし，$\theta \in \partial X$ に漸近収束する半開測地線）であるから

$$\nabla u(\,\cdot\,,\theta) = -\nabla B(\,\cdot\,,\theta) \tag{5.4}$$

となり，∂X 上の関数 f を用いて $u(x,\theta) = -B(x,\theta) + f(\theta)$ と書けることがわかる．ただし，$B(x,\theta)$ は x_0 を基点とする Busemann 関数である．Busemann 関数の定義と Poisson 核の正規化条件から，任意の $\theta \in \partial X$ に対して

$$u(x_0,\theta) = B(x_0,\theta) = 0$$

したがって，$u(x,\theta) = -B(x,\theta)$ を得る． □

Poisson 核は無限遠 Dirichlet 問題の基本解であるから，$P(x,\theta)$ は

(P1) $\Delta_g P(x,\theta) = 0$,

(P2) $\lim_{x\to\theta'} P(x,\theta)\,d\theta = \delta_\theta(\theta')$ （ただし，δ_θ は Dirac 測度）

を満たす．Poisson 核が (3.3) の形で表されるとき，上の 2 条件は以下のように Busemann 関数に関する条件に言い換えることができる；

(B1) $\Delta_g B(x,\theta) = -c$,

(B2-1) $\theta = \theta'$ のとき，$\lim_{x\to\theta'} B(x,\theta) = +\infty$,

(B2-2) $\int_{\partial X} \exp(-c\,B(x,\theta))\,d\theta = 1$.

条件 (B1) は「X 内のどのホロ球面[12]の平均曲率も共通一定値である」ことを意味し，こ

[12] Busemann 関数 $B(\,\cdot\,,\theta)$ の等位超曲面を $\boldsymbol{\theta \in \partial X}$ を中心とするホロ球面という．

のような空間を漸近的調和多様体*13という．条件 (B2-1) は「任意の異なる $\theta, \theta' \in \partial X$ が X 内の測地線で結べる*14」ことと同値*15であり，このような空間を可視多様体という．

以上のことから，次の系を得る．

系 5.2. Hadamard 多様体 (X, g) 上に Poisson 核 $P(x, \theta)$ が存在し，ある点 x_0 で正規化されているとする．このとき，Poisson 核写像 φ が相似的 $(\varphi^* G = \frac{c^2}{n} g)$ かつ調和写像ならば，(X, g) は漸近的調和多様体かつ可視多様体である．

注意 5.3. J. Heber[8] は等質 Hadamard 多様体 (X, g) に対して，以下の条件が同値であることを示した；

(1) (X, g) は漸近的調和かつ Einstein 多様体*16である．
(2) (X, g) は Euclid 空間かまたは Damek-Ricci 空間である．

Bochner の公式

$$g(d(\Delta_g f), df) = |\nabla df|^2 + \frac{1}{2}\Delta_g(|df|^2) + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f),$$

を Busemann 関数に適用すると，(X, g) が漸近的調和多様体のとき，

$$\mathrm{Ric}(\nabla B, \nabla B) = -|\nabla dB|^2$$

を得る．したがって，g が Eintein 計量であることと，Busemann 関数のヘッシアンのノルムが $\theta \in \partial X$ に依らず一定であること*17は同値である．さらに部分多様体の Gauss の公式より，「どのホロ球面のスカラー曲率も共通一定値をとる」ことと同値である．

注意 5.4. $k\,(\geq 2)$ 次元 Euclid 空間は可視多様体ではない．したがって，可視多様体 (X, g) は 2 次元以上の単連結完備な全測地的平坦部分多様体を許容しない．このことから，多様体が解析的ならば X の階数*18は $\mathrm{rank}(X) = 1$ となる．Knieper[16] は単連結非コンパクト調和多様体 (X, g) に対して以下の 4 つの条件が同値であることを示した；

(1) X は Gromov 双曲的である．

---

*13 調和多様体は漸近的調和多様体である．

*14 X 内の測地線 γ で $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \theta$ かつ $\lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = \theta'$ を満たすものが存在すること．

*15 可視多様体の定義にはこの他にもいくつかの同値の命題が存在する．詳しくは [1] を参照．

*16 調和多様体は Einstein 多様体である．

*17 この性質は幾何学的には「ホロ球面の主曲率の二乗和が共通一定値をとる」ことを意味する．

*18 単位節ベクトル v に対し，γ_v を $\dot{\gamma}_v(0) = v$ となる測地線とする．γ に沿った平行 Jacobi 場のなす空間の次元を $r(v)$ とおくとき，$\mathrm{rank} := \min\{r(v)\}$ を多様体の階数という [6]．

(2) X は指数的体積増大度をもつ.

(3) X の階数は 1 である.

(4) X は接束 TX の佐々木計量に関して Anosov 測地流をもつ.

漸近的調和多様体において空間の可視性（および階数が 1 であること）と Gromov 双曲性等の性質が関係しているのか興味深い問題である.

参考文献

[1] W. Ballmann, M. Gromov and V. Schroeder, Manifolds of Nonpositive Curvature, Progress in Math. **61**, Birkäuser, 1985.

[2] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces, Lecture Notes in Math. **1598**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[3] A. L. Besse, Manifolds all of whose geodesics are closed, Ergeb. Math. Grenzgeb. **93**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[4] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 731-799.

[5] M. J. Druetta, Homogeneous Riemannian manifolds and the visibility axiom, Geom. Dedicata **17** (1985), 239-251.

[6] P. B. Eberlein, Geometry of nonpositively curved manifolds, Chicago Lectures in Math., University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996.

[7] T. Friedrich, *Die Fisher-Information und symplektische Strukturen*, Math. Nachr. **153** (1991), 273-296.

[8] J. Heber, *On harmonic and asymptotically harmonic homogeneous spaces*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 869-890.

[9] M. Itoh and H. Satoh, *Fisher information geometry of Poisson kernels and heat kernels on Riemannian manifolds*, Proc. 12th International Workshop on Differential Geom. **12** (2008), 1-20.

[10] M. Itoh and H. Satoh, *Information geometry of Poisson kernels on Damek-Ricci spaces*, Tokyo J. Math. **33** (2010), 129-144.

[11] M. Itoh and H. Satoh, *The Fisher Information metric, Poisson kernel and har-*

monic map, submitted.

[12] M. Itoh, H. Satoh and Y. Shishido, *A note on the Fisher information metric and heat kernels*, Int. J. Pure Appl. Math. **46** (2008), 347-353.

[13] M. Itoh, H. Satoh and Y. Shishido, *Information Geometry of Heat Kernels and the Entropy of Harmonic Manifolds*, preprint.

[14] 伊藤光弘, 宍戸雄一, The Fisher information metric and Poisson kernels over negatively curved Riemannian manifolds, 数理解析研究所講究録, **1560** (2007), 121-136.

[15] M. Itoh, Y. Shishido, *Fisher information metric and Poisson kernels*, Differential Geom. Appl. **26** (2008), 347–356.

[16] G. Knieper, *New results on noncompact harmonic manifolds*, arXiv:0910.3872.

[17] 酒井 隆, リーマン幾何学, 数学選書 11, 裳華房, 1992.

[18] T. Sakai, *On Riemannian manifolds admitting a function whose gradient is of constant norm*, Kodai Math. J. **19** (1996), 39-51.

[19] R. Schoen and S.-T. Yau, Lectures on Differential Geometry, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology **1**, International Press, Cambridge, 1994.

[20] Z. I. Szabó, *The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds*, J. Differential Geom., **31** (1990), 1-28.